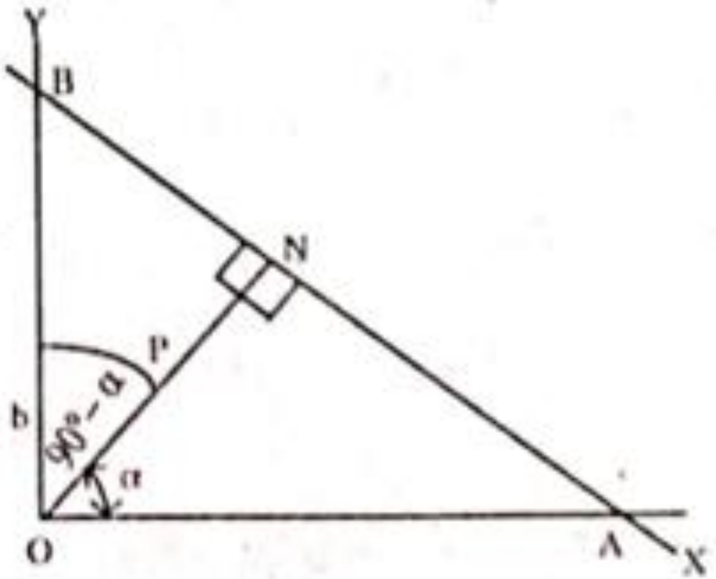
CH-5

Straight Line

v)

এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, মূলবিন্দু হতে যার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য P এবং যোগবোধক X অক্ষের সাথে উক্ত লম্বের উৎপন্ন কোণের পরিমাণ α দেওয়া আছে। (To find the equation of a straight line when the length of the perpendicular P on it from the origin and the inclination α of this perpendicular to the X axis all given) ঃ

মনে করি, AB নির্দিষ্ট সরলরেখা। মূলবিন্দু 'O' হতে এর উপর অঙ্কিত লম্ব ON = P এবং $\angle AON = \alpha$



$\therefore \angle BON = 90° - \alpha$

এখন ΔONA হতে পাই,

$$\frac{OA}{ON} = \sec\alpha$$

বা, $OA = ON \sec\alpha$

$\therefore PA = P \sec\alpha$

আবার, ΔONB হতে পাই,

$$\frac{OB}{ON} = \sec(90° - \alpha)$$

$\therefore OB = ON \operatorname{cosec}\alpha = P \operatorname{cosec}\alpha$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$

বা, $\frac{x}{P \sec\alpha} + \frac{y}{P \operatorname{cosec}\alpha} = 1$

$\therefore x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$; যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

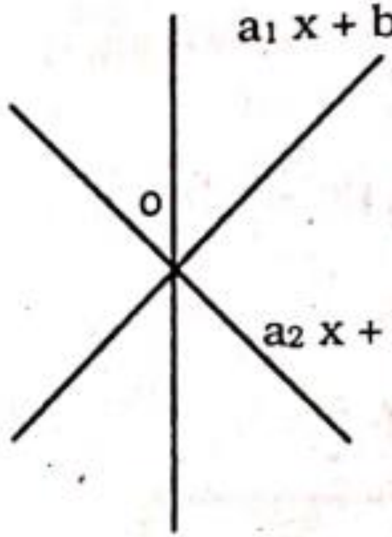
দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

মনে করি, সরলরেখা দুটির সমীকরণ,

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ .... (i)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (ii)

মনে করি, সরলরেখা দুটি পরস্পর (x_1, y_1) বিন্দুতে ছেদ করেছে।



তাহলে আমরা পাই,

$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$ .... (iii)

$a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$ .... (iv)

বজ্রগুণন প্রণালির সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{x_1}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y_1}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$\therefore \quad x_1 = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং $y_1 = \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$

অতএব, রেখা দুটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$

(i) এবং (ii) সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হবে ঃ

$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ যখন k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

দুটি প্রদত্ত সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করতে হবে

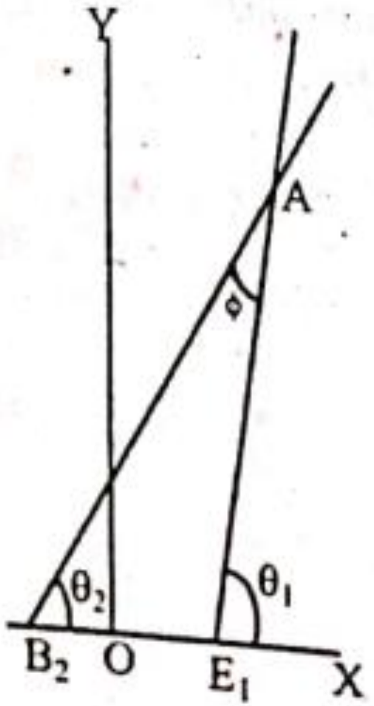
(i) মনে করি, সরলরেখা দুটির সমীকরণ,

$$y = m_1x + c_1$$

এবং $y = m_2x + c_2$.

মনে করি, রেখা দুটি X অক্ষের সাথে θ_1 এবং θ_2 কোণ উৎপন্ন করে এবং রেখা দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ ϕ.

তাহলে, $\tan\theta_1 = m_1$ এবং $\tan\theta_2 = m_2$



চিত্র হতে, $\phi = \theta_1 - \theta_2 \ldots\ldots (i)\ (\theta_1 > \theta_2)$

$$\therefore \tan\phi = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$\text{i. e. } \tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

এই প্রকারে ϕ এর মান নির্ণয় করা যায়।

দুটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল অবস্থানের শর্ত নির্ণয়

দুটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\phi=0^\circ$ হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল, অর্থাৎ $\tan\phi = 0$.

$y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ দুটি রেখার সমান্তরাল অবস্থানের শর্ত হল,

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = 0$$

$\therefore m_1 - m_2 = 0$

বা, $m_1 = m_2 \ldots \quad \ldots (i)$

অনুরূপে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y+c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের সমান্তরাল অবস্থানের শর্ত হলো,

$a_2b_1 - a_1b_2 = 0.$

বা, $a_1b_2 = a_2b_1$

বা, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \ldots\ldots\ldots (ii)$

দুটি সরলরেখার পরস্পর লম্বভাবে অবস্থানের শর্ত নির্ণয়

দুটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\phi = 90°$ হলে, এরা পরস্পর লম্ব হয়।

অতএব, $\tan\phi = \tan 90° = \infty$.

সুতরাং দুটি রেখা $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থানের শর্ত হল,

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \infty$$

বা, $1 + m_1m_2 = 0$

বা, $\mathbf{m_1m_2 = -1}$

অনুরূপভাবে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত,

$$\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = \infty$$

$\therefore \mathbf{a_1a_2 + b_1b_2 = 0}$

তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু (concurrent) হওয়ার শর্ত ঃ

ধরি, সরলরেখা তিনটির সমীকরণ,

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ .... (1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (2)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ .... (3)

যদি রেখা তিনটি (x', y') বিন্দু দিয়ে যায়, তবে (x', y') বিন্দু দ্বারা রেখা তিনটি সিদ্ধ হবে। অর্থাৎ

$a_1x' + b_1y' + c_1 = 0$ .... (4)

$a_2x' + b_2y' + c_2 = 0$ .... (5)

$a_3x' + b_3y' + c_3 = 0$ .... (6)

(4) নং, (5) নং ও (6) নং সমীকরণ হতে (x', y') অপসারণ করে আমরা পাই,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$ এটিই রেখা তিনটি সমবিন্দু হওয়ার শর্ত।

(iv) সমান্তরাল ও লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

একটি সরলরেখা হতে একটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়।

ধরি, $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ সমীকরণবিশিষ্ট AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।
মনে করি, AB রেখাটি X ও Y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$$OA = -\frac{c}{a},\ OB = -\frac{c}{b}$$

$$\therefore AB = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}$$

$$= \pm\frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}$$

PM ও PN যথাক্রমে OX ও OY এর উপর লম্ব। $P(x,y)$ বিন্দু হতে AB এর উপর লম্ব দৈর্ঘ্য = PL

$\therefore PM = y_1,\ PN = x_1$

এখন $\Delta APB + \Delta POA + \Delta POB = \Delta AOB$

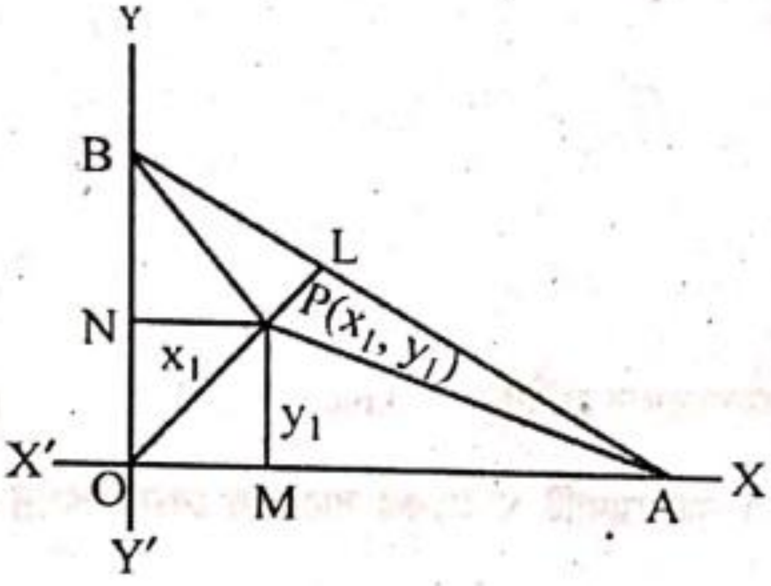
বা, $\frac{1}{2}AB.PL + \frac{1}{2}OA.PM + \frac{1}{2}OB.\ PN = \frac{1}{2}OA.OB$

বা, $AB.PL + OA.PM + OB.PN = OA.OB$

বা, $PL\ (\pm\frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}) + (-\frac{c}{a})\ y_1 + (-\frac{c}{b})\ x_1 = (-\frac{c}{a})\ (-\frac{c}{b})$

বা, $\pm PL\sqrt{a^2 + b^2} = ax_1 + by_1 + c$

$$\therefore PL = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$P(x_1,y_1)$ বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$

∴ রেখার লম্ব দূরত্ব (দৈর্ঘ্য) $P = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

(i) যদি দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হয়, তবে এদের ঢাল সমান।

(ii) যদি দুটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হয়, তবে এদের ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হবে।